1	2	3	4	5
5	0	25	15	5

Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр»
для обучающихся 5-11 классов 2022/2023 уч. год

Σ50

Математика
предмет

ШИФР 81-10-М-32

15

№4 Дано:

4-х угольник ABCD

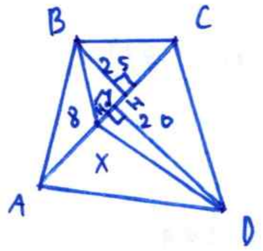
$S_{ABM}=8$

$S_{MBC}=25$

$S_{MCD}=20$

Найти:

S_{MAD}-?



1) $S_{MBC}=25=\frac{1}{2}\cdot BH\cdot MC$

2) $S_{MBA}=8=\frac{1}{2}\cdot BH\cdot AM$

3) $\frac{S_{MBC}}{S_{MBA}}=\frac{25}{8}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot \cancel{BH}\cdot MC}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{BH}\cdot AM}=\frac{MC}{AM}$

4) Проведём высоту DH_1. Аналогично

$S_{MCD}=\frac{1}{2}\cdot DH_1\cdot MC$

$S_{MAD}=\frac{1}{2}\cdot DH_1\cdot AM$

$\frac{S_{MCD}}{S_{MAD}}=\frac{20}{S_{MAD}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot \cancel{DH_1}\cdot MC}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot \cancel{DH_1}\cdot AM}=\frac{MC}{AM}$

5) из (3) и (4) следует, что $\frac{25}{8}=\frac{MC}{AM}=\frac{20}{S_{MAD}}$ =>

$S_{MAD}=\frac{20\cdot 8}{25}=6,4$

Ответ: $S_{MAD}=6,4$

№3 Дано:

$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

$f(2021)\cdot f(-2022)=2$

Найти:

$f(2023)$-?

25

1) $f(2021)\cdot f(-2022)=f(-1)=2$

~~2) $f(2023)=f(2022+1)=f(2022)\cdot f(1)$~~

2) $f(x-1)=f(x)\cdot f(-1)=f(x)\cdot 2$

$f(x-1)=f(x)\cdot 2 \quad |:2$

$f(x)=\frac{f(x-1)}{2}$ =>

$f(2023)=\frac{f(2022)}{2}=f(2022)\cdot 2^{-1}=f(2021)\cdot 2^{-2}=\ldots$

$\ldots=f(0)\cdot 2^{-2023}=f(-1)\cdot 2^{-2024}=2\cdot 2^{-2024}=2^{-2023}$

Ответ: $f(2023)=2^{-2023}$

№1 * $\begin{cases} x^3-2023x=y^3-2023y \\ x\cdot y=2022 \end{cases}$

* $x^3-2023x=y^3-2023y$

$x^3-y^3=2023(x-y)$

$(x-y)(x^2+xy+y^2)=2023(x-y)$

$(x-y)((x^2+y^2+xy)-2023)=0$

$x-y=0$ или $x^2+y^2+xy-2023=0$

$x=y$ - не удовл. условию задачи $x\neq y$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

5

$x^2+y^2+2022-2023=0$

$x^2+y^2=1$

Ответ: $x^2+y^2=1$

№5

$(5-\cos(2(x+y))+4\cdot\sin(x+y))\cdot\log_2(3^x+3^{-x})\le 2$

$(5-(\cos^2(x+y)-\sin^2(x+y))+4\cdot\sin(x+y))\cdot\log_2(3^x+3^{-x})-\log_2 4\le 0$

$(5-(1-\sin^2(x+y))+\sin^2(x+y)+4\cdot\sin(x+y))\cdot\log_2(3^x+3^{-x})-\log_2 4\le 0$

$(4+\sin^2(x+y)+\sin^2(x+y)+4\cdot\sin(x+y))\cdot\log_2(3^x+3^{-x})-\log_2 4\le 0$

Пусть $t=\sin(x+y)$

$(4+t^2+t^2+4t)\cdot\log_2(3^x+3^{-x})-\log_2 4\le 0$

$(\overset{(*)}{2t^2+4t+4})\cdot\log_2(3^x+3^{-x})-\log_2 4\le 0$

(*) $2t^2+4t+4=0$

$t^2+2t+2=0$

$D=2^2-4\cdot1\cdot2=-4 \Rightarrow$

$2t^2+4t+4>0$

т.к. $2t^2+4t+4>0 \Rightarrow$

$\log_2(3^x+3^{-x})-\log_2 4\le 0$

??

Применим метод рационализации:

$(2-1)(3^x+3^{-x}-4)\le 0$

$3^x+3^{-x}-4\le 0$

5б

Пусть $z=3^x$

$z+z^{-1}-4\le 0$

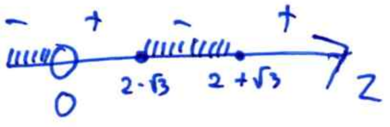
$\frac{z^2}{z}+\frac{1}{z}-\frac{4z}{z}\le 0$

$\frac{\overset{(**)}{z^2-4z+1}}{z}\le 0$

(**) $z^2-4z+1=0$

$D=16-4\cdot1\cdot1=12$

$z_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3}$



$z<0$ или $2-\sqrt{3}\le z\le 2+\sqrt{3}$

$3^x<0$ $\qquad 2-\sqrt{3}\le 3^x\le 2+\sqrt{3}$

$\varnothing$ $\qquad \log_3(2-\sqrt{3})\le x\le\log_3(2+\sqrt{3})$

ответ: $x\in[\log_3(2-\sqrt{3});\log_3(2+\sqrt{3})]$

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

**ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА
ОЛИМПИАДЫ «Я – БАКАЛАВР»
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ
2022/2023 учебный год**

ПО МАТЕМАТИКЕ

КЛАСС 10

ШИФР 61-10-М-22

Задание 1.

Числа x и y удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x^3 - 2023x = y^3 - 2023y, \\ x \cdot y = 2022. \end{cases}$$

Найти $x^2 + y^2$.

Задание 2.

Решите уравнение: $2arcsinx + arccos\sqrt{3}x = \frac{\pi}{2}$

Задание 3.

Функция f(u), не являющаяся постоянной, удовлетворяет равенству $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ для любых x, y. Найдите значение $f(2023)$, если $f(2021) \cdot f(-2022) = 2$.

Задание 4.

Точка M, расположенная на диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$, соединена отрезками с его вершинами. Площади образовавшихся треугольников MAB, MBC, MCD равны 8, 25, 20 соответственно. Найти площадь четвертого треугольника MAD.

Задание 5.

Решите неравенство $(5 - \cos 2\,(x+y) + 4\sin(x+y))\log_2(3^x + 3^{-x}) \leq 2$