

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА  
ОЛИМПИАДЫ «Я – БАКАЛАВР»  
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ  
2021/2022 учебный год

$\Sigma$  50

ПО МАТЕМАТИКЕ

1	2	3	4	5
20	20	5	5	0

КЛАСС 10

ШИФР 61101161

**Задание 1.**

Три друга – Дима, Вова и Игорь – преподают геометрию, комбинаторику и теорию чисел; один из них работает в Санкт-Петербурге, другой – в Орле и третий – в Ростове-на-Дону. Дима работает не в Орле, Вова – не в Санкт-Петербурге, петербуржец преподает теорию чисел, орловец – не комбинаторику, Вова – не геометрию. Какой предмет преподает каждый из них?

**Задание 2.**

Дано выражение  $A = xy + yz + zx$ , где  $x, y, z$  – целые числа. Если число  $x$  увеличить на 1, а числа  $y$  и  $z$  уменьшить на 2, то значение выражения  $A$  не изменится. Докажите, что число  $(-1) \cdot A$  – квадрат целого числа.

**Задание 3.**

Внутри квадрата  $ABCD$  отмечена точка  $M$  так, что угол  $\angle ADM = \angle MAD = 15^\circ$ . Найдите угол  $\angle BCM$  и радиус вписанной и описанной около треугольника  $MCB$  окружностей, если сторона квадрата равна 1.

**Задание 4.**

При каких простых значениях натурального числа  $p$  число  $8p^2 + 1$  также простое?

**Задание 5.**

Найдите все решения уравнения

$$(y(x-1))^2 + (x-1)^2 + y^2 + 1 - 4y|x-1| = 0$$



# МАТЕМАТИКА

предмет

ШИФР 6110161

205

## Задание 1.

Отметим в таблице то, что дано и отдельно запишем условие про петербуржца и орловца.

город			зн.	предмет		
СПб	О	РнД		Г	К	ТЧ
1	0	0	Д	0	0	1
0	0	1	В	0	1	0
0	1	0	И	1	0	0

СПб - ТЧ

0 - ~~ТЧ~~

Т.к. только друг из СПб может преподавать Т.Ч.  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  Вова не преподаёт Т.Ч. (и не геометрию по усл.)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  Вова преподаёт комбинаторику  $\Rightarrow$  Вова не из Орла  
 (и не из СПб)  $\Rightarrow$  Вова из РнД  $\Rightarrow$  Дима не из РнД  
 (и не из Орла)  $\Rightarrow$  Дима из СПб  $\Rightarrow$  Дима преподаёт Т.Ч.  
 Т.к. Вова - комбинаторика, а Дима - теория чисел  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  Игорь - геометрия. (методом исключения)

Ответ: Вова преподаёт комбинаторику; Дима преподаёт теорию чисел; Игорь преподаёт геометрию.

## Задание 2.

$$A = xy + yz + zx \quad (1) \quad x, y, z \in \mathbb{Z}$$

$$A = (x+1)(y-2) + (y-2)(z-2) + (z-2)(x+1) \quad (2)$$

Док-во:

Док-тв:

(-1) \* A - квадрат целого числа.

$$(2): A = (x+1)(y-2) + (y-2)(z-2) + (z-2)(x+1)$$

$$A = xy - 2x + y - 2 + yz - 2z - 2y + 4 + zx - 2x + z - 2$$

$$A = \underbrace{xy + yz + zx}_A + y - 2y - 2x - 2x - 2 + 4 - 2 - 2z + z$$

$$A = A - y - 4x - z + 0 \Rightarrow y + z + 4x = 0 \Rightarrow z = -4x - y$$

Подставим  $z = -4x - y$  в (1):

205



$$A = xy + y(-4x-y) + (-4x-y)x = \cancel{xy} - 4xy - y^2 - 4x^2 - \cancel{xy} =$$

$$= -4x^2 - 4xy - y^2 = -(4x^2 + 4xy + y^2) = -(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = -(2x+y)^2$$

$$A = -(2x+y)^2 \quad / \cdot (-1)$$

$$(-1) \cdot A = (2x+y)^2$$

Т.к.  $x \in \mathbb{Z}$  и  $y \in \mathbb{Z}$  ( $2 \in \mathbb{Z}$ )  $\Rightarrow (2x+y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow (-1) \cdot A$  - квадрат целого числа, т.к.  $(-1) \cdot A = (2x+y)^2$ .

ч.т.д.

Задача 4.

$8p^2+1$  - простое  $p$ -простое - ?

$p=3: 8 \cdot 9 + 1 = 73$  - простое.

Ответ:  $p=3$ .

Задача 5.

$$(y(x-1))^2 + (x-1)^2 + y^2 + 1 - 4y|x-1| = 0$$

при  $x-1=0 \Rightarrow x=1: 0 + 0 + y^2 + 1 - 0 = 0$

$$y^2 + 1 = 0, y^2 \geq 0 \Rightarrow y \in \emptyset \Rightarrow x \neq -1.$$

при  $x-1 > 0$

$$x > 1: y^2(x-1)^2 + (x-1)^2 + y^2 + 1 - 4y(x-1) = 0$$

$$(y^2+1)(x-1)^2 + y^2+1 - 4y(x-1) = 0$$

$$(y^2+1)((x-1)^2+1) - 4y(x-1) = 0$$

08

при  $x-1 < 0$

$$x < 1: y^2(x-1)^2 + (x-1)^2 + y^2 + 1 + 4y(x-1) = 0$$

$$\underbrace{(y^2+1)}_{>0} \underbrace{((x-1)^2+1)}_{>0} + \underbrace{4y(x-1)}_{<0} = 0$$

$$\begin{cases} 4y(x-1) < 0 \\ |4y(x-1)| = (y^2+1)((x-1)^2+1) \end{cases}$$

$$4y(1-x) = (y^2+1)((x-1)^2+1)$$

Задача 3.

Т.к.  $\angle MAD = \angle ADM \Rightarrow \triangle ADM$  - р/б  $\Rightarrow AM = MD$ .

$$\angle AMD = 180^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 150^\circ$$

$$\angle DMK = 180^\circ - \angle AMD = 30^\circ; \angle DKM = 90^\circ - \angle DAK = 75^\circ (\triangle ADK \text{ - р/б/уг}); \angle MPK = 180^\circ - \angle DMK - \angle MKD = 75^\circ \Rightarrow \triangle DMK \text{ р/б}$$

$$\Rightarrow DM = MK = AM$$

$$\triangle AMB = \triangle DMC: \text{т.к. } AB = DC, AM = MD, \angle BAM = \angle MDC = 75^\circ \Rightarrow MB = MC \Rightarrow \triangle MBC \text{ - р/б}$$

58

