

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Донской государственный технический университет»

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА
ОЛИМПИАДЫ «Я – БАКАЛАВР»
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ
2021/2022 учебный год

ПО МАТЕМАТИКЕ

1	2	3	4	5
5	20	15	5	0

КЛАСС 9

ШИФР 57-9-М-07

Задание 1.

Сколько членов числовой последовательности 32, 28, 24, 20, 16..., начиная с первого, надо сложить, чтобы получить сумму, равную 132?

Задание 2.

Дано выражение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, где x и y – натуральные числа. Если число x увеличить на 2, а число y уменьшить на 2, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xу + 1$ – квадрат целого числа.

Задание 3.

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ADC = 60^\circ$, $AB = AD = DC$. Найдите $\angle ABD$, если $\angle BCA = 65^\circ$. Ответ дайте в градусах.

Задание 4.

Назовем натуральное число интересным, если произведение его цифр больше суммы его цифр. Найдите наименьшее интересное четырехзначное число.

Задание 5.

На координатной плоскости изображена парабола – график квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$. Известны координаты точек $A(-5; 0)$ и $B(20; 0)$ – пересечения данной параболы с осью Ox . Точка C – пересечение данной параболы с осью Oy – расположена выше оси Ox . Также известно, что $\angle ACB = 90^\circ$. Найдите коэффициенты a , b , c квадратного трехчлена.

Математика
предмет

ШИФР 57-9-М-07

N_1

$$a_1 = 32$$

$$a_2 = 28$$

$$a_3 = 24$$

и т.д.

\Rightarrow числа убывающей арифметической прогрессии.

$$d = -4$$

Можно вычислить по формуле

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n,$$

но в данном случае ~~лучше~~ удобнее посчитать сумму без формулы.
Сначала сложим представленные числа.

$$32 + 28 + 24 + 20 + 16 = 120$$

До 132 не хватает 12, и именно 12 следующее число в прогрессии.

$$\underbrace{32 + 28 + 24 + 20 + 16 + 12}_{6} = 132$$

Всего мы сложили 6 чисел, начиная с первого, а значит сложили 6 членов последовательности.

Ответ: 6 - не все берем.

N2

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, где x и y - натуральные числа.

2) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y-2}$, где x и y - натуральные числа имеет то же значение, что и первое выражение, =>

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y-2}$$

Приведем к общему знаменателю в каждой части.

1) $\frac{y+x}{xy} = \frac{y-2+x+2}{(x+2)(y-2)}$

раскроем по свойству пропорции

$$(x+y)(x+2)(y-2) = xy(x+y)$$

сократим на $(x+y)$

$$(x+2)(y-2) = xy$$

раскроем скобки

$$xy + 2y - 2x - 4 = xy$$

$$xy - xy + 2y - 2x - 4 = 0$$

$$2y - 2x - 4 = 0$$

$$2y = 2x + 4$$

сократим на 2

$$y = x + 2$$

2) $xy = x(x+2) = x^2 + 2x$

$$xy + 1 = x(x+2) + 1 = x^2 + 2x + 1$$

Допустим, что

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

Тогда:

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1) = (x+1)^2, \Rightarrow$$

$$xy = (x+1)^2$$

x - натуральное число и целое число, т.к. все натуральные \neq целые.

$(x+1)$ - натуральное целое число, =>

$(x+1)^2$ - квадрат целого числа.

Ответ: и.т.д.

МАТЕМАТИКА

предмет

ШИФР 54-9-М-04

№

58

\overline{abcd} – интересное число, если $(abcd > a+b+c+d)$

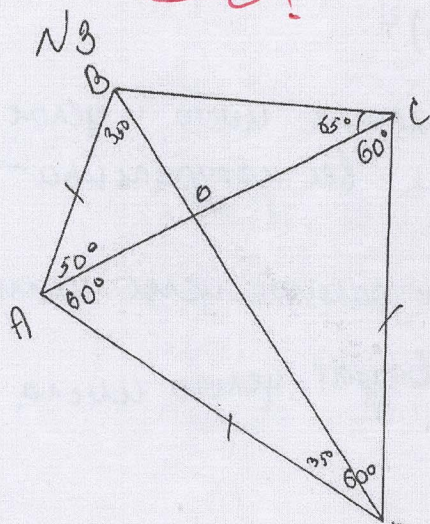
\overline{abcd} наименьшее, если цифры наименьшие

! ~~наименьшее~~ интересное число не может содержать 0, т.к. тогда $abcd = 0$, а $(a+b+c+d) > 0$, \Rightarrow не выполняется условие.

Число 1111, 2111, 2211 – неинтересные, а 2221 – интересное с минимальной суммой цифр, \Rightarrow минимальное интересное число будет содержать такой же набор цифр.

Наименьшее с таким набором – 1222, что и является наименьшим интересным четырехзначным числом.

Ответ: 1222.



(произвольный выпуклый четырехугольник)

O – точка пересечения диагоналей.

Из $\triangle ABC$

$AB = BC$ (по усл.) $\Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедр.

$\angle BAC = 110^\circ$, $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = (180^\circ - 110^\circ) : 2 = 35^\circ$

$\angle ABD = 35^\circ$

Ответ: 35°

15

Решение:
Из $\triangle ADC$

$AD = DC$ (по усл.) $\Rightarrow \triangle ADC$ – равнобедр. \Rightarrow

$\angle CAD = \angle ACD = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$

$\angle CAD = \angle ACD = \angle ADC \Rightarrow \triangle ADC$ – равносторон.

В равностороннем треугольнике все стороны равны, значит $AC = AD = DC = AB$

Из $\triangle ABC$

$\triangle ABC$ – равнобедр. $\Rightarrow (AB = AC) \Rightarrow$

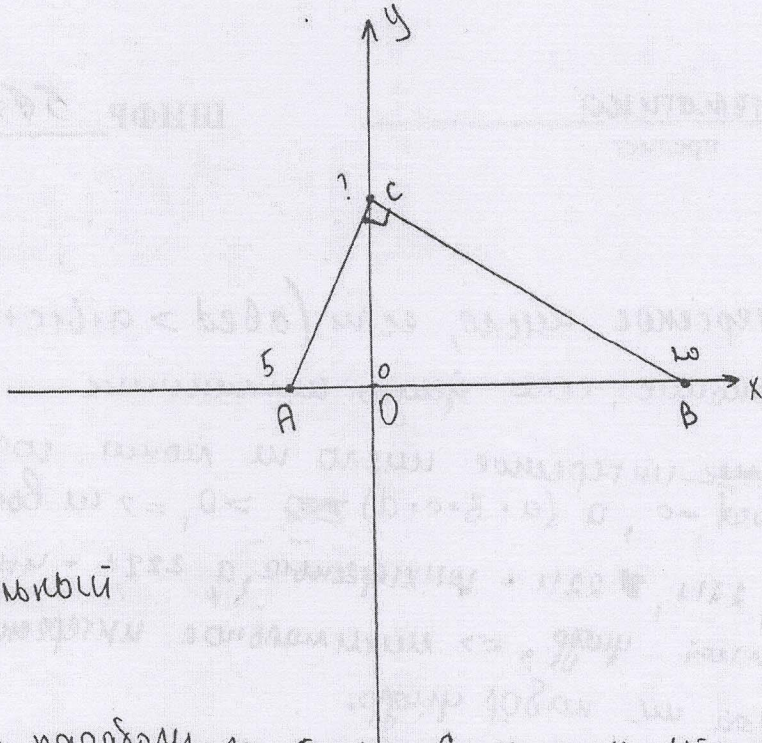
$\angle ABC = \angle CBA = 65^\circ$

$\angle BAC = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$

N5

08

$$y = ax^2 + bx + c$$



$\triangle ACB$ - прямокутний

если продолжить параболу к точке C получим, что коэф. $a < 0$, т.к. ветви параболы пойдут вниз.

коэф. $b > 0$, ~~т.к.~~ т.к. параболы пересекает Oy в точке, большей нуля.

$\triangle ACB$; $\triangle ACO$; $\triangle OCB$ - прямоугольные.

